

《數聞》第三期挑戰園地解答

1. 設 a_1, a_2, a_3, \dots 為一數列。已知 $a_1 = 2$ ，及對所有正整數 n ，均有 $a_{n+1} = a_n + 2^n + 1$ ，求 a_n （答案以 n 表示）。

解答：答案為 $a_n = 2^n + n - 1$ ，可用數學歸納法證明之。

2. 若一個正整數的數位由 1 和 8 梅花間竹地組成，它便稱為一個「牛數」。例如 1、8、18、181、8181 是牛數，而 79、11、1881 則不是牛數。求所有既是牛數，亦是平方數的正整數。

解答：首先，平方數的個位不可能是 8。在個位為 1 的牛數中，1 和 81 為平方數。其他個位為 1 的牛數的末三位為 181，故它們被 8 除餘 5（因為 1000 被 8 整除）。然而，任何奇數的平方均被 8 除餘 1。這是因為對於任何整數 n ，

$$(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 4n(n+1) + 1,$$

而 n 和 $n+1$ 其中一個為偶數，故 $4n(n+1)$ 被 8 整除。所以，既是牛數，亦是平方數的正整數只有 1 和 81。

3. 設 $ABCD$ 為等腰梯形，其中 $AB \parallel DC$ ， $AD = BC$ ，且梯形內有一個與四邊都相切（即與每邊都剛好交於一點）的圓。設這個圓跟 BC 交於 E ，跟 AD 交於 F 。求證：直線 AC 、 BD 、 EF 交於一點。

解答：設 G 為 AC 和 EF 的交點。為證明 G 乃 BD 上的一點，只需證明 G 是 EF 的中點，因為同理可證 BD 也平分 EF 。現計算 EG 的長度。由於三角形 ABC 與 GEC 相似，故有 $EG = (AB \cdot CE)/BC$ 。由於 $CE = CD/2$ ，故 $EG = (AB \cdot CD)/(2BC)$ 。至於要計算 FG ，則考慮 ACD 和 AGF 這對相似三角形。我們有 $FG = (CD \cdot AF)/AD$ 。由於 $AF = AB/2$ ，故 $FG = (CD \cdot AB)/(2AD) = (AB \cdot CD)/(2BC) = EG$ 。證畢。

4. 以下是一個「所有人的身高相同」的「證明」：「設 $P(n)$ 代表以下命題：『無論怎樣選出 n 人，他們的身高總是相同。』 $P(1)$ 顯然成立。假設 $P(k)$ 成立。那麼，每當選出 $(k + 1)$ 人，由歸納假設可知，第 1、2、……、 k 人的身高相同，亦可知第 2、3、……、 $(k + 1)$ 人的身高相同。故此，這 $(k + 1)$ 人的身高都相同。所以 $P(k + 1)$ 亦成立。根據數學歸納法原理， $P(n)$ 對所有正整數 n 都成立。」這個證明有什麼問題？（可參考本期關於數學歸納法的文章。）

解答：題中由 $P(k)$ 推導出 $P(k + 1)$ 的論證，不適用於 $k = 1$ 的情況。

得獎者名單：

學生姓名	學校名稱
張紫希	聖保羅男女中學
方子路	聖公會林護紀念中學
劉禮元	拔萃男書院

獎者亦會另外獲電郵通知。